数理解析研究所講究録
475巻 1982年 117-122

Grothendieck ring と a lifting ring map

愛媛大(理) 宮本雅彦
(Masahiko Miyamoto)

§0 序　環Aに対し，各有限生成左A-加群Mを生成元とし，A-加群の short exact sequence $0\to M'\to M\to M''\to 0$ により 加法 $[M]=[M']+[M'']$ を定義してできる加法群をAの Grothendieck group と呼び $G_0(A)$で表わす。以下 Gを有限群，Rを代数体Kの代数的整数全体の環とする。このとき 群環 RG, KG の Grothendieck group $G_0(RG)$, $G_0(KG)$ は自然な tensor product により環となることが Swan (1963) によって示されている。ここでの目的は この Grothendieck ring $G_0(RG)$ の構造を求めることである。

容易に $G_0(KG)$は Gの K-character ring と同型であることがわかる。又 自然な全射が $\theta([M])=K\otimes_R M$ により，$\theta: G_0(RG)\to G_0(KG)$ と与えられるので，加法群として，$G_0(RG)\cong \mathrm{Ker}\,\theta\oplus G_0(KG)$ と同型となる。$G_0(RG)$の加法群としての構造は 最初に Heller-Reiner (1964) により，特徴付けが与えられてはいるが，非常にわかりにくいものでした。しかし 最近，H. Lenstra (1981) が Abelian group G に対して 非常に簡単な表示を得ました。

(H. Lenstra) $\quad G_0(RG) \cong \oplus_{\chi\in Y}(\mathbb{Z}\oplus Cl(R\langle\chi\rangle))$

ここで，YはGのcharacterのK-共役類の代表系，$R\langle\chi\rangle$は$R(\chi(g) : g\in G, \frac{1}{|G/\mathrm{Ker}\,\chi|})$，$Cl(R\langle\chi\rangle)$は$R\langle\chi\rangle$のideal class groupを表わすものとする。

既約分解はKG-加群では自然に起こりますが，RG-加群では一般に起こりません。H. Lenstraの結果は適当な同型をとれば，$G_0(RG)$はKGの分解に従うことを示しています。ここでのオ一の結果として，この結果が，nilpotent groupまで拡張できることを示しましょう。

定理1. nilpotent group Gに対して，同型

$$G_0(RG)\cong \oplus_{\chi\in Y} G_0(RG\langle e(\chi)\rangle) \cong \oplus_{\chi\in Y} G_0(\Gamma e(\chi))$$

が成り立つ。ここで，$e(\chi)$はχに対応するKGのcentral idempotent，$RG\langle e(\chi)\rangle$は$RGe(\chi)(1/|G/\mathrm{Ker}\,\chi|)$，$\Gamma$は$RG$を含む$KG$のあるmaximal R-orderを表わすものとする。

次に$G_0(RG)$の積構造を考える。先に述べたように，自然な全射$\theta : G_0(RG)\to G_0(KG)$が存在するので，加群としての単射$\omega : G_0(KG)\to G_0(RG)$で$\omega\cdot\theta = 1_{G_0(KG)}$となるものが存在する。それゆえ，積を決定するためには，$G_0(RG)=\mathrm{Ker}\,\theta\oplus\mathrm{Im}\,\omega$と分解してそれぞれの積表示を得ればよいわけである。

$G_0(RG)$の積構造は　これまで非常に簡単な群に対してしか求められていなかったが、その手段の重要な所は、ωとしてそれ自身 ring homo. となるものを見つけ出すことであった。

予想　　任意の群Gに対し、$\theta: G_0(RG)\longrightarrow G_0(KG)$ は ring homo として split する。

この予想は Gが nilpotent group なら成り立つ。

定理2.　　Gを nilpotent group とすると、$\theta: G_0(RG)\to G_0(KG)$ は ring homo. として split する。　又 Kが Gの splitting field なら、任意の有限群に対して、θは split する。

§1.　定理1の証明の概略.

Gを nilpotent group とし、$G=\prod_p G_p$ をGの各 Sylow p-部分群G_p の直積分解とする。　Gの位数の素因子の適当な集合Sに対し、$G_S=\prod_{p\in S}G_p$ と書く。このとき $G\to G_S\to G$ の homomorphisms によって導かれる functor を N_S と書く。　即ち、RG-加群Mに対して、$N_S M$は R-加群としてMと一致し、$p\in S$に対して G_pは Mと同じ作用をし、$p\notin S$なるG_pは Mに trivial な作用をするものである。容易に、

N_Sは exact functor であり，$G_0(RG)\to G_0(RG_S)\to G_0(RG)$ を導く。一方 Gの任意の既約 character χ に対し，G_Sは 正規部分群なので χ_{G_S} の成分を $G\to G_S$ により，Gの既約 character と見て χ_S を定義できる。Grothendieck groups の元を区別するために，それぞれ，$G_0(RG)$の元は $[M,G]$，$G_0(RGe(\chi))$ の元は $[M,\chi]$，そして $G_0(RG\langle e(\chi)\rangle)$ の元は $[M,\langle\chi\rangle]$ で表わすとする。

次の準同型を考えよう。Mをある RG-加群でかつ，$RGe(\chi)$-加群とする。$\pi(\chi)$を $|G/\ker\chi|$ を割る素数の集合とする。

$$\Psi(M) = \sum_{S\subseteq\pi(\chi)} [N_S M, \langle\chi_S\rangle] \in \oplus_{\chi'\in Y} G_0(RG\langle e(\chi')\rangle)$$

と定義すると，N_S は exact functor なので 自然に拡張して，

$$\Psi : G_0(RG) \to \oplus_{\chi'\in Y} G_0(RG\langle e(\chi')\rangle)$$

を得る。一方 $\phi: G_0(RG\langle e(\chi)\rangle) \to G_0(RG)$ を

$$\phi([M,\langle\chi\rangle]) = \sum_{S\subseteq\pi(\chi)} (-1)^{|\pi(\chi)-S|} [N_S M, G]$$

と定義すれば，容易に Ψの逆写像 Φ を得る。

$$\Phi : \oplus_{\chi'\in Y} G_0(RG\langle e(\chi')\rangle) \to G_0(RG)$$

これにより 同型 $G_0(RG) \cong \oplus_{\chi'\in Y} G_0(RG\langle e(\chi')\rangle)$ を得る。

§2. 定理2の証明の概略

Gを nilpotent group とする。もし Gが faithful primitive irreducible K-加群 Wをもつとすると，Gは高々 index 2 の normal cyclic group $\langle a\rangle$ of order n を持ち，$W\cong K(\zeta_n)$

となる。ここで ζ_n は 1 の原始 n 乗根で、a は $K(\zeta_n)$ の上に ζ_n の積と作用する。しかも $R(\zeta_n)$ は G の作用に不変となる。このことを使うと、G の各既約 K-加群 V に対して、G のある部分群 H と高々指数が 2 の部分群 $\langle a, K_{(n)}W \rangle$ と primitive irreducible KH-加群 $W \cong K(\zeta_n)$ とがあって、$W^G \cong V$ となる。ここで、$\partial: G_0(RG) \to G_0(KG)$ を split する ring homo. (a lifting ring map) を次のように定義する。

$$
\begin{array}{cccc}
\pi_G: & G_0(KG) & \longrightarrow & G_0(RG) \\
 & \Downarrow & & \Downarrow \\
 & [V] & \longrightarrow & [R(\zeta_n)^G]
\end{array}
$$

このとき、これが lifting ring map であるように、π が定義可能であることを示さなければならない。そのために次のことをそれぞれ示す。

(I) 各 V に対して H と $W = K(\zeta_n)$ の取り方によらず $\pi([V])$ が定義できることを示す。

(II) G の部分群 $N_1 \geq N_2$ と N_1-加群 V_1, N_2-加群 V_2 に対しても、$\pi_{N_1}(V_1)$, $\pi_{N_2}(V_2)$ が定義されるが、次が成り立つ。即ち、$\{\pi_N\}$ は G-functor としての morphisms となる。

(i) $\pi_{N_1^g}(V_1^g) = \{\pi_{N_1}(V_1)\}^g \in G_0(RN_1^g)$ for ${}^\forall g \in G$

(ii) $\pi_{N_2}(V_{1\,N_2}) = \{\pi_{N_1}(V_1)\}_{N_2} \in G_0(RN_2)$

(iii) $\pi_{N_1}(V_2^{N_1}) = \{\pi_{N_2}(V_2)\}^{N_1} \in G_0(RN_1)$

(III) $\pi_G(V \otimes W) = \pi_G(V) \cdot \pi_G(W)$ for KG-加群 V, W.

これらの結果をそれぞれ証明すれば，容易に定理2を導くことができる。

参考文献

[1] H. Lenstra, Grothendieck groups of Abelian group rings, J. Pure Appl. Algebra 20 (1981), 173-193

[2] I. Reiner and K.W. Roggenkamp, Integral representations, (Springer Lecture Notes 744, Springer, Berlin, 1979)